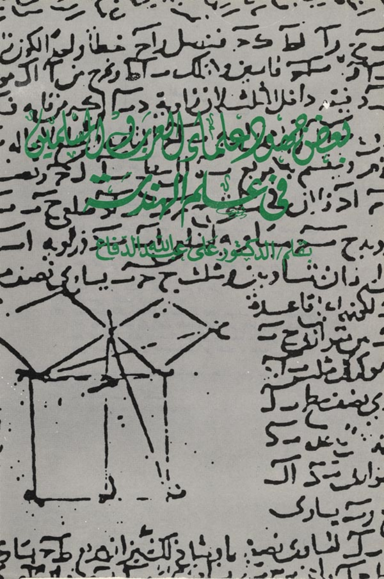
بعض جهود علماء العرب والمسلمين
في علم الهندسة

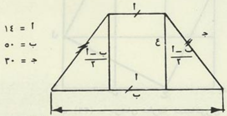
بقلم / الدكتور علي عبدالله الدفاع



بدأ علماء المسلمين بدراسة هندسة الأغريق دراسة مستفيضة قبل أن يقوموا بتعميم بعض النظريات الهندسية، وإقامة براهين مبتكرة على البعض الآخر، ونشير هنا بوجه خاص إلى تعميم نظرية فيثاغورث، وإلى علماء المسلمين فيما يختص بفرضية التوازي أو المصادرة الخامسة من مصادرات اقليدس، واستخدام الجبر في تعيين مساحات الأشكال وحجوم الأجسام. هذه لمحة سريعة لا تعدو كونها إشارة فحسب إلى بعض فضل علماء المسلمين في مجال الهندسة.

تعميم نظرية فيثاغورث لأي مثلث :

ورد في كتاب «موجز تاريخ الرياضيات» لهشام الطيار ويحيى عبد سعيد: «إن قدماء المصريين استطاعوا بطريقة بسط الحبل وتقسيمه بواسطة عقد بنسبة ٣ : ٤ : ٥ رسم زوايا قوائم واستخدام هذه الفكرة على شكل مثلث قائم الزاوية في بنائهم أهرامات الجيزة الثلاثة المعروفة في مصر. أما البابليون فقد عرفوا قياس مساحة المستطيلات، والمثلثات المتساوية الساقين، والقائمة الزاوية، وشبه المنحرف، ويظهر من ذلك نظرية فيثاغورث تماما، وقد وجد مكونم (R. de Mecguenem) ألواحا من الطين في عام ١٩٣٤م بمدينة سوس، فضلا عما ظهر في كتابات أرشميدس وهيرون وديوفانتوس، وهي توضح أن البابليين استطاعوا إيجاد مساحة حقل على شكل شبه منحرف، بمعرفة قيمة الضلعين المتوازيين والضلعين الآخرين المتساويين كما في شكل (٣٨).



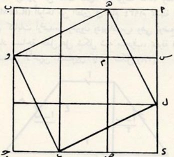
شكل (٣٨) – ايجاد مساحة شبه المنحرف متساوى الساقين .

$$\text{ع} = \sqrt{\text{د}^{٢} - \left(\frac{\text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)^{٢}} = \sqrt{(٣٠)^{٢} - \left(\frac{٣٦}{٢}\right)^{٢}} = \sqrt{٩٠٠ - ٣٢٤} = \sqrt{٥٧٦} = ٢٤$$

$$\therefore \text{مساحة شبه المنحرف} = \left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)\text{ع} = \left(\frac{٥٠ + ١٤}{٢}\right)٢٤ = ٧٦٨$$

من هذه الحقيقة يتبين لنا جليا أن البابليين كانوا على معرفة جيدة بنظرية المثلث قائم الزاوية، المعروفة بنظرية فيثاغورث وقانون مساحة شبه المنحرف.

أعطى ثابت بن قرة جزءا كبيرا من وقته للتطوير والتجديد في نظرية فيثاغورث التي تقول: «إن مربع الوتر في المثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين». وهذه النظرية نسبت للفيلسوف الاغريقي فيثاغورس الذي عاش فيما بين عامي ٥٨٤ – ٤٩٥ ق.م لأنه أول من برهن عليها بطريقة رياضية علمية. وقد ذكر الدكتور و.و. روس، برهانا لهذه النظرية في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات». ويجدر بنا هنا أن نقدم ملخصا لهذا البرهان:



شكل (٣٩) – برهان نظرية فيثاغورس

البرهان :

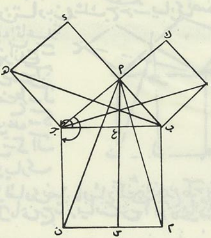
المربع ا ب حـ د = المربع هـ و ع ل + ٤ هـ ب و (شكل ٣٩) (١)

المربع ا ب حـ د = المربع م و حـ ص + المربع م هـ ا س + ٤ هـ ب و (٢)

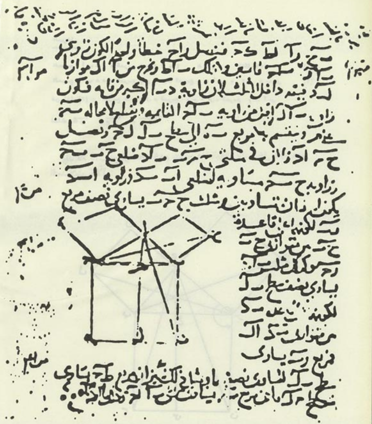
من (١)،(٢) : المربع هـ و ع ل = المربع م و حـ ص + المربع م هـ ا س

لذلك $\overline{\text{هـ و}}^{٢} = \overline{\text{م و}}^{٢} + \overline{\text{م هـ}}^{٢}$

وقد قام ثابت بن قره عام ٨٩٠م بتنقيح هذا البرهان بأن أدخل عليه بعض التعديلات كالآتي:



شكل (٤٠) – تنقيح ثابت بن قرّه لبرهان نظرية فيثاغورس



شكل (٤١) – مخطوطة تبين برهان نظرية فيثاغورس بعد التعديلات التى أدخلها ثابت بن قرة الحرانى (٨٢٦ – ٩٠١ ميلادية)على البرهان سنة ٨٩٠ م .

(نسخ المخطوطة للمرة الثانية عام ١٣٥٠ ميلادية).

البرهان :

صل ب هـ ، أ ن ، ارسم أ ع س // ب م ليقطع ب حـ في نقطة ع (شـــكلا ٤٠، ٤١)

Δ هـ حـ ب = Δ أ حـ ن حيث ان
∡ هـ حـ ب = ∡ أ حـ ن
ب حـ = حـ ن
هـ حـ = حـ أ (١)

مساحة المستطيل ع س ن حـ = ٢ مساحة Δ أ حـ ن حيث ان القاعدة المشتركة للمثلث والمستطيل هي حـ ن ، حـ ن // أ س (٢)

كذلك مساحة المربع د أ حـ هـ = ٢ مساحة Δ هـ حـ ب حيث ان القاعدة المشتركة للمثلث والمربع هي حـ هـ ، هـ حـ // د ب (٣)

من المعادلات (١)، (٢)، (٣) نجد أن مساحة المستطيل ع س ن حـ = مساحة المربع د أ حـ هـ (٤)

وبالمثل Δ حـ ل ب = Δ م أ ب حيث ان
∡ ل ب حـ = ∡ أ ب م
ل ب = أ ب
ب حـ = ب م (٥)

مساحة Δ أ ب م = $\frac{١}{٢}$ مساحة المستطيل ب م س ع حيث ان
القاعدة المشتركة هي م ب ، أ س // ب م (٦)

مساحة Δ حـ ل ب = $\frac{١}{٢}$ مساحة المربع ك ل ب أ حيث ان
القاعدة المشتركة هي ل ب ، ك حـ // ل ب (٧)

من المعادلات (٥)، (٦)، (٧) نجد أن مساحة المربع ك ل ب أ = مساحة المستطيل ب م س ع . (٨)

وكذلك من المعادلتين (٤)، (٨) يتضح أن مساحة المربع ك ل ب أ + مساحة المربع

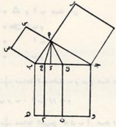
د ا جـ هـ = مساحة المستطيل ع س ن جـ + مساحة المستطيل ب م س ع

∴ مساحة المربع ب م ن جـ = مجموع مساحة المربعين ن ل ب ا + د ا جـ هـ

مع ملاحظة أن :

$$\overline{\text{ب جـ}}^{2} = \overline{\text{ا ب}}^{2} + \overline{\text{ا جـ}}^{2}$$

هذا ولم يقف ثابت بن قرة عند هذا الحد بل إنه ابتكر ما نسميه نظرية جديدة، وتنطبق على أى مثلث مختلف الأضلاع وهى : $\overline{\text{ا ب}}^{2} + \overline{\text{ا جـ}}^{2} = \text{ب جـ}\ (\text{ب ح} + \text{ك جـ})$ (شكل ٤٢) ، وقد وردت هذه النظرية فى مخطوطه الموجود فى مكتبة أيا صوفيا فى تركيا والتى حققها أ. سيديلى ، وذكرها كل من كارل بوير فى كتابه " تاريخ الرياضيات " وهوارد ايفز فى كتابه " تاريخ الرياضيات ": " ان ثابت بن قرة عمم نظرية فيثاغورس لأى مثلث ا ب د بشرط ان نقطتى ك وح تقعان على الضلع ب جـ ، وكذلك $\measuredangle$ ا ح ب = $\measuredangle$ ا ك جـ = $\measuredangle$ ا ، ومن ذلك استنتج أن :
$\overline{\text{ا ب}}^{2} + \overline{\text{ا جـ}}^{2} = \text{ب جـ}\ (\text{ب ح} + \text{ك جـ})$.



شكل(٤٢) – تعميم ثابت بن قرة لنظرية فيثاغورس

البرهان :

ارسم من رأس المثلث المستقيمات ا ح ، ا ك ، ا د حيث ان $\measuredangle$ ا ح ب = $\measuredangle$ ا ك جـ = $\measuredangle$ ا .

اعتبر ثلاث حالات :

الحالة الأولى : اذا كانت ∡ أ منفرجـــة.

حيث ان مساحة المربع أ ب ص س = مساحة المستطيل ح م هـ ب

وأيضا مساحة المربع أ جـ ط ر = مساحة المستطيل ك ن و هـ

وحيث ان ب هـ = و جـ = و هـ = جـ ب

لذلك فان : $\overline{\text{أ ب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{أ جـ}}^{\text{٢}} = \text{ب هـ} \times \text{ب ح} + \text{و جـ} \times \text{ك جـ}$

$= \text{ب جـ} \times \text{ل ح} + \text{ب جـ} \times \text{ك جـ}$

$= \text{ب جـ} \, (\text{ب ح} + \text{ك جـ})$

لذلك فان مساحة المربع أ جـ ط ر + مساحة المربع أ ب ص س = مساحة المربـــــع جـ ب هـ و – مساحة المستطيل ك ن م ح .

الحالة الثانية : اذا كانت زاويـــــة أ حادة

امكن مكان نقطتي ك ،ح واعتبر أن أ د عمودي على ب جـ

وكما عمل في الحالة الأولى : $\overline{\text{أ ب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{أ جـ}}^{\text{٢}} = \overline{\text{ب جـ}}^{\text{٢}}$ + مساحة المستطيل ك ن م ح

الحالة الثالثة : اذا كانت زاويـــــة أ قائمة

يلاحظ أن نقطتي ك ،ح تنطبقان على نقطة د

لذلك فان المثلث ب جـ أ يكافىء المثلث ب أ د علماً بان $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب د}}$

$\overline{\text{أ ب}}^{\text{٢}} = \text{ب جـ} \times \text{ب د}$ (1)

بالمثل △ جـ ب أ يكافىء △ جـ أ د علما بان $\frac{\text{جـ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ د}}$

$\overline{\text{أ جـ}}^{\text{٢}} = \text{جـ ب} \times \text{جـ د}$ (2)

من المعادلتين (١)،(٢) نجد أن : $\overline{\text{أ ب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{أ جـ}}^{\text{٢}} = \text{جـ ب} \times \text{ب د} + \text{جـ ب} \times \text{جـ د}$

$$\overline{\text{أ ب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{أ جـ}}^{\text{٢}} = \text{جـ ب} \, (\text{ب د} + \text{جـ د})$$

$$\overline{\text{أ ب}}^{\text{٢}} + \overline{\text{أ جـ}}^{\text{٢}} = \overline{\text{جـ ب}}^{\text{٢}}$$

قانون الكرخي لمساحة الشكل الرباعي

من المعروف أن هيرون السكندري الذي عاش في القرن الأول للميلاد قد توصل الى تعيين مساحة المثلث بدلالة أطوال أضلاعه على الوجه التالي :

$$\text{المساحة} = \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{جـ})}$$

حيث ح = نصف محيط المثلث ، أ ، ب ، جـ أطوال أضلاع المثلث .

وقد أدخل أبو بكر محمد بن الحسين الكرخي (المتوفى عام١٠١٦ م) تعديلا على هذا القانون بحيث صار ينطبق على أي شكل رباعي ، حيث يتخذ قانون الكرخي الشكل التالي :

$$\text{مساحة أي شكل رباعي} = \sqrt{(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{جـ})\,(\text{ح} - \text{د})}$$

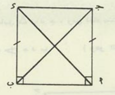
حيث ح تمثل نصف محيط الشكل الرباعي ، ويرمز لأطوال الأضلاع بالحروف أ، ب، جـ، د .

مصادرات (موضوعات) اقليدس :

من أمثلة التنقيحات والاضافات التي أدخلها علماء المسلمين على هندسة اقليدس «فرضية التوازي» التي لم يستطع اقليدس أن يثبتها أو يعرضها على هيئة نظرية، فعالج هذه المصادرة ابن الهيثم أولاً، ثم عمر الخيامي، ثم نصير الدين الطوسي في القرن السابع الهجري (الثالث عشر الميلادي)، مع أن محاولاتهم لايجاد برهان لهذه المصادرة لم تبلغ ذروتها المطلوبة. ولكن كانت تلك البراهين حافزا قويا ومفتاحا واضحا لبعض علماء الرياضيات في أوروبا في العصور الحديثة، لوضع هندسات أخرى «لا اقليدية» مثل هندسة «برنهارد ريمان» (Bernhard Riemann) (١٨٢٦ – ١٨٦٦ ميلادية) و«هندسة نيكولاي لوبا شيفسكي». (Nikolai Lobachvsky) الذي عاش في القرن التاسع عشر أيضا.

يعتبر عمر الخيامي علم الهندسة من المواضيع الأساسية اللازمة لدراسة أي

حقل من حقول الرياضيات، لذلك فإنه قد ركز على دراسة هندسة إقليدس التي شرحها وعلق عليها علماء الرياضيات المسلمون. كما أنه أولى عناية خاصة لتفهم ما قدمه الحسن بن الهيثم في برهانه للمصادرة (للموضوعة) الخامسة من مصادرات أو موضوعات اقليدس، ثم ببرهان جديد من ذلك المنطلق. ويذكر المؤلف أورثر جتليمن في كتابه «تاريخ الرياضيات»: «أن عمر الخيامي حاول جهده أن يبرهن الموضوعة الخامسة من موضوعات اقليدس التي استعصت على من سبقه من علماء المسلمين. ولم تبرهن برهانا صحيحا الى يومنا هذا». ويجدر بنا أن نذكر أن يوجين سمث نشر مقاله في مجلة (سكريبتا ماثماتيكا) عن محاولة عمر الخيامي لبرهنة هذه الموضوعة الخامسة، والتي جاءت في رسالته «شرح ما أشكل من مصادرات كتاب اقليدس»، وكان برهان عمر الخيامي كالآتي:



شكل (٤٣) – برهان عمر الخيامي للمصادرة الخامسة لاقليدس

المعطيات : كل من أ حـ ، ب د ⊥ أ ب ، أ حـ = ب د (شكل ٤٣).

المطلوب : اثبات أن :–

(١) ∠ د حـ أ = ∠ حـ د ب

(٢) العمود المقام من منتصف أ ب ينصّف حـ د ويكون عموديا عليه

(٣) أ ب // حـ د

(٤) ∠ أ حـ ع = ∠ ن ع حـ = زاوية قائمة.

العمـل : نصل نقطتي ب ،حـ وكذلك نصل نقطتي أ،د

△ حـ أ ب ، △ أ ب د فيهما :

ا جـ = ب د

ا ب مشترك

∡ جـ ا ب = ∡ ا ب د = زاوية قائمة .

∴ △ جـ ا ب يطابق △ ا ب د ، ومن ذلك ينتج أن :

ا د = ب جـ

△ ا جـ د ، △ ب د جـ فيهما :

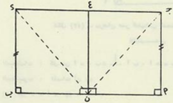
ا د = ب جـ

ا جـ = ب د

جـ د مشترك

∴ △ ا جـ د يطابق △ ب د جـ ، ومن ذلك ينتج أن :

∡ ا جـ د = ∡ جـ د ب (وهو المطلوب أولا) .



شكل(٤٤) ـ تابع برهان عمر الخيامى للمصادرة الخامسة لاقليدس .

بالرجوع الى شكل (٤٤) نجد أن :

△ جـ ا ن ، △ د ب ن فيهما :

∡ جـ ا ب = ∡ د ب ا = قائمة
ا ن = ن ب
ا حـ = ب د
مُعطى

∴ △ جـ ا ن يطابق △ د ب ن

لذا ن جـ = ن د ،

∡ ا ن حـ = ∡ د ن ب ⟸ ∡ حـ ن ع = ∡ ع ن د

△ جـ ع ن ، △ د ع ن فيهما :

ن جـ = ن د

∡ جـ ن ع = ∡ ع ن د

ع ن مشترك

∴ △ جـ ع ن يطابق △ د ع ن

لذا ∡ حـ ع ن = ∡ ن ع د ، ولكن ∡ جـ ع ن + ∡ ن ع د = ١٨٠°

∴ ن ع ⊥ جـ د .

وكذلك جـ ع = ع د من تطابق المثلثين جـ ع ن ، د ع ن .

∴ ن ع ينصف حـ د ، ويكون عموديا عليه (المطلوب ثانيا) .

∴ ∡ حـ ع ن = ٩٠°

، ∡ ع ن ب = ٩٠°

∴ ∡ جـ ع ن = ∡ ع ن ب متبادلتين

∴ جـ د // ا ب (المطلوب ثالثا).

افرض ان :

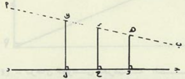
ا جـ اكبر من ن ع ⟸ ∡ ا جـ ع زاوية حادة ، ∡ ن ع حـ زاويه منفرجه ، وهذا يناقض المعروف من (٣) ان ∡ ن ع جـ = ٩٠°

ا ﺟ اصغر من ن ع ⟸ ∡ ا ﺟ ع زاوية منفرجة، ∡ ن ع ﺟ زاويه حاده ،
وهذا يناقض المعروف من (٣) ان) ن ع ﺟ = ٩٠°
اذن ∡ ا ﺟ ع = ∡ ن ع ﺟ = ٩٠° . من ذلك نستنتج ان مجموع ز. سا اى شكل
رباعى = ٣٦٠° ، وان مجموع زوايا اى مثلث تساوى ١٨٠° . (المطلوب رابعـــــا).

هذا وقد أبدع نصير الدين الطوسي في دراسة العلاقة بين المنطق والرياضيات، حتى أن معظم علماء العالم يقولون عند مقارنة بين ابن سينا والطوسي بأن ابن سينا طبيب ناجح، بينما الطوسي رياضي بارع، فأطلق عليه اسم «المحقق». والجدير بالذكر أن الطوسي نال شهرة مرموقة في علم الهندسة، مما جعل العالم الألماني فيدمان يقول عنه : «إن نصير الدين الطوسي نبغ في شتى فروع المعرفة، وبالأخص في علم البصريات، اذ أتى ببرهان جديد لتساوي زاويتي السقوط والانعكاس، يدل على خصب قريحته وقوة منطقه، وقد حاول نصير الدين الطوسي أن يبرهن فرضية اقليدس الخامسة في كتابه «الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية» فكانت محاولة ناجحة حيث فتحت باب النقاش وعدم التسليم بما كتبه اقليدس وأمثاله من عمالقة اليونان في علم الهندسة. ويقول جورج سارتون في كتابه «المدخل الى تاريخ العلوم»: «إن الطوسي أظهر براعة فائقة النظير وخارقة للعادة في معالجة قضية المتوازيات في الهندسة، وجرب أن يبرهنها، وبنى برهانه على فروض تدل على عبقريته، ومن المسائل التي برهنها هذه المسألة: «دائرة تمس أخرى من الداخل، قطرها ضعف الأول، تتحركان بانتظام في اتجاهين متضادين، بحيث تكونان دائما متماسكتين، وكون سرعة الدائرة الصغيرة ضعف الدائرة الكبرى». برهن نصير الدين أن نقطة تماس الدائرة الصغرى تتحرك على قطر الدائرة الكبرى، وجدير بالذكر أن هذه النظرية هي أساس تصميم جهاز الاسطرلاب البالغ الأهمية.

وقد أولى الطوسي اهتماما ملموسا بالهندسة الفوقية أو الهندسة غير الاقليدية (الهندسة الهذلولية) التي بنيت على أسس منطقية تناقض هندسة اقليدس، التي كان يعتقد بأنها ليست قابلة للتغيير والانتقاد عبر العصور كما ناقش البروفيسور دريك سترويك في كتابه «ملخص تاريخ الرياضيات» : «ان نصير الدين

الطوسي حاول بكل جدارة أن يبرهن على الموضوعة الخامسة من موضوعات اقليدس. فكانت محاولته بدء عصر جديد في علم الرياضيات الحديثة، لهذا انصبت عقليته العظيمة على برهانها، وهو (أن مجموع زوايا المثلث تساوي زاويتين قائمتين)، فقبل أن يبدأ نصير الدين في برهانه للموضوعة الخامسة لاقليدس حاول أن يعطي مقدمة عن التقارب والتباعد، فمثلا لو أخذ المرء مستقيمين أ ب، د حـ كما في شكل (٤٥).



شكل (٤٥) – مقدمة برهان نصير الدين الطوسى لفرضية التوازى

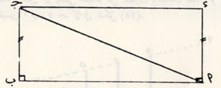
وأسقط الأعمدة هـ و ، ر ح ، ك ل ..... الخ على د حـ من النقاط هـ،ر،ك ،.........
والواقعة على المستقيم أ ب كما بشكل (٤٥) ، بحيث يتحقق الآتى :

- ∡ ب هـ و ≠ ∡ و هـ ر
- ∡ هـ ر ح ≠ ∡ ح ر ك

لهذا يتضح أن الزاويتين المتجاورتين على المستقيم أ–ب غير متساويين. فلتكن الزوايا التي باتجاه ب زوايا حادة، والزوايا التي باتجاه أ زوايا منفرجة ولتكن الأعمدة أطول كلما كانت باتجاه أ،د وأصغر ان كانت باتجاه ب، حـ، أي أن المسافة بين المستقيمين أ ب، د حـ تصغر كلما توغلنا في الاتجاه ب، حـ والعكس صحيح، أي أنه: لو كانت الزوايا الحادة باتجاه النقطتين أ،د، فان التقارب سيكون باتجاه النقطتين أ،د، والتباعد باتجاه النقطتين ب،حـ.

بعد هذه المقدمة بدأ نصير الدين الطوسي في برهانه الذي صار متداولا في كتب الهندسة التي تدرس في جامعات العالم، ونادرا بل يكاد يستحيل أن

يحصل على كتاب بعنوان الهندسة الفوقية (الهندسة الهذلولية) دون التعرض لاسهام نصير الدين الطوسي في هذا المضمار. بدأ الطوسي برهانه بالشكل الآتي :



شكل(٤٦) ـ برهان الطوسي لفرضية التوازى .

- رسم عمودين د أ، حـ ب على المستقيم أ ب من النقطتين أ، ب بحيث أن المستقيمين د أ، حـ ب يكونان متساويين، ويقعان على نفس الجهة من المستقيم أ ب.

- أوصل النقطتين د، جـ.
- حاول أن يبرهن أن الزاويتين هـ د أ، ب حـ د قائمتان.
- فرض أن ∠حـ د أ ليست زاوية قائمة فهي اما أن تكون :–
(أ) زاوية حادة
أو (ب) زاوية منفرجة.
- اذا كانت زاوية د حـ ب زاوية حادة، فالزاوية حـ د أ ستكون زاوية منفرجة، وهذا بالطبع يؤدي الى أن يصير المستقيم ب حـ أطول من المستقيم أ د، ولكن هذا يناقض ما افترضه، فالزاوية د حـ ب ليست زاوية حادة.

- اذا كانت الزاوية د حـ ب زاوية منفرجة، فالزاوية حـ د أ ستكون زاوية حادة، فينتج أن المستقيم أ د أطول من المستقيم حـ ب، وهذا أيضا يناقض

ما افترضه، فالزاوية د حـ ب ليست زاوية منفرجة، أي: يجب أن تكون زاوية قائمة.

ومما سبق ذكره توصل الطوسي الى أن الزوايا الأربع للشكل الرباعي المذكور جميعها زوايا قائمة، وبالتالي فان مجموع زوايا المثلث أ د حـ تساوي زاويتين قائمتين وأن △ أ ب حـ= △، أ د حـ متطابقان. كما استنتج الطوسي أن مجموع زوايا المثلث= $\frac{١}{٢}$ مجموع زوايا الشكل الرباعي أ ب حـ د.

بهذا البرهان استطاع نصير الدين الطوسي أن يبرهن على أن: «مجموع زوايا أي مثلث مساوية لزاويتين قائمتين». وهذا بالضبط ما يكافىء الموضوعة الخامسة من موضوعات اقليدس. ان محاولة الطوسي لبرهان الموضوعة الخامسة لاقليدس لها طابع أصيل، فلم يسبق لأحد قبله أن لاحظ محاولته. وقد ادعى سكيري هذا الشكل الرباعي لنفسه، والحق أن هذا المربع يجب أن ينسب أولا لعمر الخيامي، الذي اكتشفه قبل سكيري بأكثر من خمسمائة عام. والجدير بالذكر أن هذا المربع كان له أهمية بالغة في الهندسة غير الاقليدية (الهندسة الهذلولية)، لذا يجب أن نعتبر أن عمر الخيامي ونصير الدين الطوسي هما اللذان وضعا حجر الأساس للهندسة غير الاقليدية (الهندسة الهذلولية).

يذكر عمر رضا كحالة في كتابه «العلوم البحتة في العصور الاسلامية»: «انه يمكن القول بأن الطوسي امتاز على غيره في بحوثه في الهندسة، لاحاطته بالقضايا الأساسية التي تقوم عليها الهندسة المستوية فيما يتعلق بالمتوازيات، وقد ألمّ بها، كما جرب أن يبرهن قضية المتوازيات الهندسية وقد وُفق في ذلك. ومعظم براهينه على المسائل الهندسية لمحاولات الذين سبقوه، فصاغ كل ذلك في شكل مبتكر لم يسبق اليه، وهو يعتبر من هذه الوجهة متفوقا على معاصريه»، وأضاف جلال مظهر في كتابه «أثر العرب في الحضارة الأوروبية – نهاية عصور الظلام وتأسيس الحضارة الحديثة»: «أن الطوسي تنبه لنقص هندسة اقليدس، فعلق وبرهن على كثير من النظريات في كتاب «تحرير أصول اقليدس»، وفي

الرسالة الثانية للطوسي أثر في تقدم بعض النظريات الهندسية. وقد نشر جون واليس هذه البحوث باللاتينية في سنة ١٦٥١م.

وجاء من بعد نصير الدين الطوسي العالم الرياضي الانجليزي صاحب الشهرة العظيمة في الغرب جان واليس، الذي عاش فيما بين عامي ١٦١٦ و ١٧٠٣م، والذي درس بكل تمعن برهان نصير الدين للموضوعة الخامسة من موضوعات اقليدس، واعترف في دراسته بأن نصير الدين الطوسي عالم رياضي له فضل كبير في بدء الهندسة الفوقية (الهندسة الهذلولية)، وظهور فجر الرياضيات الحديثة. كما ذكر الأستاذ هوارد ايفز في كتابه «تاريخ الرياضيات»: «ان جرولا سكيري الايطالي – الذي عاش فيما بين عامي ١٦٦٧ و ١٧٣٣م – كان أستاذا في علم الفلسفة والرياضيات في جامعة باثيا في ايطاليا والمسمى بأبي الهندسة غير الاقليدية أو الهندسة الفوقية (الهندسة الهذلولية)، ومما لا يقبل الشك أنه اعتمد اعتمادا كليا على عمل نصير الدين الطوسي في هذا المجال.

ومع الأسف فان علماء الرياضيات في العصر الحديث اذا تكلموا عن الهندسة الفوقية (الهندسة الهذلولية) قرنوا اسمها بأسماء بعض علماء الرياضيات الغربيين ذوى الشهرة الكبيرة في حقل الرياضيات، مثل نيكولاي لوباشفسكي (Lobachevsky) الروسي الذي عاش ما بين عامي ١٧٩٣ و ١٨٥٦م، وكارل جاوس (Gauss) الألماني الذي عاش ما بين عامي ١٧٧٧ و ١٨٥٥م، ولفقان بولياي المجري الذي عاش ما بين عامي ١٨٢٦ و ١٨٦٦م، ونسوا العلماء الذين سبقوا هؤلاء بقرون عدة، والذين كان لهم أثر مرموق في هذا الحقل مثل الحسن ابن الهيثم وثابت بن قرة، ونصير الدين الطوسي، حيث كانت مؤلفاتهم تدرس في مدارس وجامعات الغرب والشرق حتى القرن الثاني عشر الهجري (الثامن عشر الميلادي). ويجب أن لا يخفى على القاريء أن الهندسة غير الاقليدية (الهندسة الهذلولية) لها في وقتنا الحاضر أثر عظيم في دراسة الفضاء الطبيعي وتفسيرات النظرية النسبية.

بعض جهد الخوارزمي في حساب المساحة :

عرف الخوارزمي الوحدة المستعملة في المساحات، واستخدم «التكسير» ويقصد بذلك المساحة، سواء كانت سطحية أو حجمية، كما تطرق الى ايجاد مساحات بعض السطوح المستقيمة الأضلاع، والأجسام، والدائرة، والقطعة، والهرم الثلاثي والرباعي، والمخروط، والكرة. كذلك استعمل النسبة التقريبية وقيمتها $ط = \frac{٢٢}{٧}$ ، او $\sqrt{١٠}$ او $\frac{٦٢٨٣٢}{٢٠٠٠٠}$ ولقد أثرى علم الجبر باستعماله بعض الأفكار الجبرية لمعرفة المساحة، واختار مثالا يوضح به مدى استخدام النظريات الجبرية، وهو:

«فان قيل أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع وعشرة أذرع والقاعدة اثنا عشر في جوفها أرض مربعة كم كل جانب من المربعة، فقياس ذلك أن تعرف عمود المثلثة، وهو أن تضرب نصف القاعدة – وهو ستة – في مثله، فسيكون ستة وثلاثين فانقصها من أحد الجانبين الاقصرين مضروبا في مثله – وهو مائة – يبقى أربعة وستون، فخذ جذورها ثمانية وهو العمود، وتكسيرها ثمانية وأربعين ذراعا، وهو ضربك العمود في نصف القاعدة – وهو ستة – فحصلنا أحد جوانب المربعة شيئا، وضربناه في مثله، فصار مالا فحفظناه، ثم علمنا أنه قد بقى لنا مثلثتان عن جنبتي المربعة ومثلثة فوقها، فأما المثلثتان اللتان على جنبتي المربعة فهما متساويتان، وعموداهما واحد، وهما على زاوية قائمة، فتكسيرها أن تضرب شيئا في ستة الا نصف شيء فيكون ستة أشياء الا نصف مال، وهو تكسير المثلثتين جميعا اللتين هما على جنبتي المربعة. فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شيء – وهو العمود – في نصف شيء فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال، فهذا هو تكسير المربعة وتكسير الثلاث مثلثات – وهو عشرة أشياء – تعدل ثمانية وأربعين، هو تكسير المثلثة العظمى، فالشيء الواحد من ذلك أربعة أذرع وأربعة أخماس ذراع، وهو كل جانب من المربعة، وهذه صورتها».

في المثال السابق استخدم الخوارزمي مساحة المثلث ومساحة المربع ونظرية

فيثاغورث لايجاد المطلوب، فلو حاولنا أن نضع طريقة حله في لغة العصر هذا، لقلنا: ايجاد طول ضلع المربع المرسوم داخل المثلث المتساوي الساقين والذي طول قاعدته=١٢ ذراعا، وطول كل من ضلعيه الآخرين ١٠ أذرع.

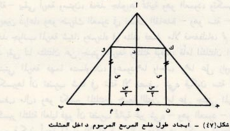
- نرسم المثلث أ ب حـ ، بحيث تكون قاعدته ب حـ = ١٢،ضلعه أ حـ = أ ب = ١٠ (شكل ٤٧).
- نرسم المربع ك ن م و داخل المثلث أ ب حـ .
- نرسم الارتفاع أ هـ .
- $\overline{\text{أ هـ}}^{٢} + \overline{\text{حـ هـ}}^{٢} = \overline{\text{أ حـ}}^{٢}$ نظرية فيثاغورس

ولكن حـ هـ = ٦ لأن △ أ ب حـ متساوى الساقين

أ هـ ⊥ القاعدة ب حـ .

∴ أ هـ = $\sqrt{\overline{\text{أ حـ}}^{٢} - \overline{\text{حـ هـ}}^{٢}} = \sqrt{(١٠)^{٢} - (٦)^{٢}}$

$= \sqrt{١٠٠ - ٣٦} = \sqrt{٦٤} = ٨$ أذرع



شكل(٤٧) - ايجاد طول ضلع المربع المرسوم داخل المثلث المتساوى الساقين.

- وبما ان △ أ ب حـ متساوى الساقين ، أ هـ عمودى على القاعدة ب حـ .

∴ هـ حـ = هـ ب = ٦ أذرع

افرض ان طول ضلع المربع ك ن م و = س

∴ هـ م = $\frac{\text{س}}{٢}$ ، م ب = ٦ − $\frac{\text{س}}{٢}$ ، ا د = ٨ − س

مساحة △ا ب حـ = مساحة △ حـ ك ن + مساحة △ب و م + مساحة △ا ك و

+ مساحة المربع ك ن م و

∴ $\frac{1}{2}$ (١٢ × ٨) = [$\frac{1}{2}$ س (٦ − $\frac{\text{س}}{٢}$)] + [$\frac{1}{2}$ س (٦ − $\frac{\text{س}}{٢}$)] +

[$\frac{1}{2}$ س (٨ − س)] + [س^{٢}]

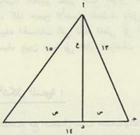
٤٨ = س (٦ − $\frac{\text{س}}{٢}$) + $\frac{1}{2}$ س (٨ − س) + س^{٢}

= ٦س − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + ٤ س − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + س^{٢}

٤٨ = ١٠س .

∴ س = ٤ $\frac{٤}{٥}$ = طول ضلع المربع .

كذلك أورد الخوارزمي مثالا آخر يبرز فيه الاستفادة من علم الجبر، عندما نحاول أن نعرف مساحة المثلث، لذا اختار الخوارزمي ايجاد مساحة المثلث اذا عرفت طول أضلاعه الثلاثة. فعلى سبيل المثال: افرض أن هناك مثلثاًأطوال أضلاعه هي (١٣، ١٤، ١٥)، والمطلوب ايجاد مساحته (شكل ٤٨).



شكل(٤٨) – ايجاد مساحة المثلث بمعرفة أطوال أضلاعه

البرهان :

بتطبيق نظرية المثلث القائم الزاوية

من Δ ا حـ د نجد ان $١٢^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢} \longleftarrow \text{ع}^{٢} = ١٢^{٢} - \text{س}^{٢}$ (١)

من Δ ا د ب نجد ان $١٥^{٢} = \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢} \longleftarrow \text{ع}^{٢} = ١٥^{٢} - \text{ص}^{٢}$ (٢)

من (١)، (٢) نجد ان $١٢^{٢} - \text{س}^{٢} = ١٥^{٢} - \text{ص}^{٢}$ (٣)

ولكن $\text{ص} = (١٤ - \text{س})$ (٤)

من (٣)، (٤) ينتج ان $١٢^{٢} - \text{س}^{٢} = ١٥^{٢} - (١٤ - \text{س})^{٢}$

$\therefore ١٦٩ - \text{س}^{٢} = ٢٢٥ - (١٩٦ - ٢٨\,\text{س} + \text{س}^{٢})$

$\therefore ١٤٠ = ٢٨\,\text{س}$ $\text{س} = ٥$ اذرع (٥)

من (١)، (٥) ينتج ان $\text{ع}^{٢} = ١٦٩ - ٢٥ = ١٤٤$

$\therefore \text{ع} = ١٢$ ذراعا

وتكون مساحة المثلث ا حـ ب $= \frac{١}{٢}\,(١٤)\,(١٢) = ٨٤$ ذراعا مربعا

حساب المساحات والحجوم عند المسلمين :

بعد أن درس المسلمون هندسة الاغريق دراسة دقيقة مفصلة، وأتموا استيعاب كل جوانبها، أمكنهم تطوير صيغ وقوانين حساب مساحات الأشكال الهندسية، كذا حجوم الأجسام المنتظمة، وتمتلئ كتابات علماء العرب والمسلمين بهذه الحسابات التي تكاد تغطي كل الأشكال والأجسام ذات الأهمية العلمية، ونبين فيما يلي مجال الدراسات التي تناولتها هذه الكتابات:

(أ) مساحات الأشكال المستوية :

١ – مساحات المثلثات، مع استعمال نسب حساب المثلثات في بعض هذه الحسابات.

٢ – مساحات الأشكال رباعية الأضلاع.

٣ مساحات المضلعات المنتظمة حتى ١٦ ضلعا، وتوجد جداول تعطي هذه المساحات، مثل ما جاء منها بكتاب «مفتاح الحساب» للكاشي (الباب الثالث من المقالة الرابعة).

٤ – مساحات الأشكال الدائرية والحلقات والقطاعات والأشكال المحدودة بأقواس دائرية كالأشكال الهلالية والنعلية والاهليليجية والشلمجية(١).

٥ – مساحات الأشكال الهندسية المستوية المكونة من تركيبات من الأشكال المتقدمة.

(ب) مساحات السطوح للأجسام المنتظمة كالاسطوانات والمخروطات والمشورات والكرات.

(جـ) حجوم الأجسام المنتظمة مثل :

١ – الاسطوانات والمخروطات التامة والناقصة.
٢ – الكرات والقطع الكروية.
٣ – الأجسام المضلعة.
٤ – الجسم المتولد من دوران القطع المكافىء حول محوره(٢)، وينسب هذا العمل أيضا للحسن بن الهيثم (٦٥ /٩٦٦ – ٨ /١٠٣٩م).

(د) مساحات وحجوم الأشكال المعمارية :

يفرد غياث الدين جمشيد الكاشي المتوفى عام (١٤٣٦م) – على سبيل المثال لا الحصر – جانبا من كتابه «مفتاح الحساب»(٣) لحساب مساحات وحجوم أشكال معمارية متنوعة، نذكر منها :

١ – العقود نصف المستديرة.
٢ – العقود ذات القطوع.
٣ – العقود المدببة.
٤ – العقود المكونة من ثلاثة أقواس.
٥ – القباب الكروية، وأنصاف هذه القباب.
٦ – القباب المكونة من أهرامات مضلعة.
٧ – الأنواع المختلفة من المحراب.

ويردف الكاشي حساباته بجداول ضمنها نتائج هذه الحسابات.

الهوامش

(١) راجع مثلا «خلاصة الحساب» لبهاء الدين العاملي: الباب السادس.

(٢) (Paraboloid).

(٣) الباب التاسع من المقالة الرابعة.